Лекция 6. Биомедициналық процестерді математикалық модельдеу. опуляция және оларға тән қатынастар (дәріс беруші- қауымдастырылған профессор Маусымбекова С.Д.)

Алматы, 2024

Экология – популяцияның, экожүйелердің, қауымдастықтардың уақыт және кеңістіктегі, табиғи және адам өзгертетін жағдайлардағы, құрылымы мен жұмыс істеу мүмкіндіктерін зерттейтін ғылым. Көптеген биологиялық зерттеулер түрлердің дамуы мен эволюциясы, түрлер арасындағы бәсекелестік, қоршаған орта факторларының ықпалы, эпидемияның таралуы және т.б. сияқты мәселелерді қарастырады. Осы зерттеулердің ешқайсысы зерттелетін популяцияның қолайлы математикалық моделінсіз табысты болмайды. Популяцияның қарым-қатынасы - бұл түрлердің өзара қатынастары. Әр түрлі популяциясының өзара қатынынасы әртүрлі. Популяцияларда тірі ағзаларға тән барлық байланыстар бар, бірақ ең көп таралған өзара тиімді және бәсекеге қабілетті қатынастар болып табылады. Популяция саны - белгілі бір аумақтағы немесе көлемдегі жеке тұлғалардың жалпы саны. Популяция тығыздығы - бұл бірлік ауданға не бірлік көлемге сәйкес жеке тұлғалардың саны, мысалы, 1 гектарға 150 қарағай немесе судың 1 литріне 0,5 грамм қоспа. Популяциялық динамиканы үш түрін атауға болады: 1) тұрақты; 2) өзгергіш; 3) лезде көбейетін. Популяциялық динамика популяцияның санын реттейді және жаңару, алмасу арқылы қоршаған ортаның жағдайына бейімдейді. Популяция туу процесі мен иммиграция арқылы көбейсе, өлім мен эмиграция нәтижесінде жойылады.

Популяция өсуінің қарапайым модельдерінің бірі XVIII ғасырдың аяғында алын-ған, ғалым Мальтусқа тиесілі. Ол популяцияның экспоненталық түрде өсу үрдісін байқаған. Табиғатта, кейбір тіршілік иелерінің саны шын мәнінде геометриялық прогрессиямен өсе алады, бірақ популяция санының өсуін келесі факторлар тежейді: өмір сүру күресі, ауру түрлері, табиғи өлім және жыртқыштардың жоюы. Әдетте популяция азық-түлік көп және жыртқыштар салыстырмалы аз ортада тез өсе бастайды. Уақыт өте келе, азық-түлік қоры таусылады, өмір сүру үшін қолайлы шарттар азайып, популяция саны кемиді. Белгілі бір жағдайларда тепе-теңдік күйіне жетіп, популяция саны тұрақты бола бастайды. Әлбетте, бұл туған және қайтыс болған популяция санының арасындағы дәл қарым-қатынасты білу өте маңызды болып табылады.

Мальтузиандық өсу моделі

Популяцияның мальтузиандық өсу моделі – шексіз өсудің классикалық моделі. $N(t)$ - t уақыттағы популяция саны, ал b және d сәйкесінше орташа туу деңгейі мен халықтың жан басына шаққандағы өлім-жітім саны болсын. Δt уақыт аралығында популяциядағы $b\Delta tN$ - туылғандар саны, ал өлім-жітім саны - $d\Delta tN$ болсын. $t+\Delta t$ уақыт аралығында N үшін теңдеу келесі түрде анықталады:

$$N(t+\Delta t) = N(t) + b\Delta tN(t) - d\Delta tN(t),$$

Бұл теңдеуді келесі түрде жазуға болады:

$$(N(t+\Delta t) - N(t))/\Delta t = (b-d)N(t),$$

ал $\Delta t \to 0$ ұмтылғанда,

$$\frac{dN}{dt} = (b-d)N. \tag{1}$$

Популяцияның бастапқы саны N_0 және $r = b - d > 0$ болғанда, $N = N(t)$ экспоненциалды өседі: $N(t) = N_0 e^{rt}$.

Логистикалық теңдеу

Экспоненциалды өсу заңына сәйкес оқшауланған популяция шектеусіз ресурс жағдайында дамиды. Жоғарыда айтылғандай, табиғатта мұндай жағдайлар өте сирек кездеседі. Болжам бойынша, қоршаған ортаның ішкі өткізгіштік K қабілеті бар, ал бұл мөлшерден асатын популяция өлім-жітімді арттырады. Популяцияның ішкі өткізу K қабілеті бар ортаны модельдеу үшін келесі түрдегі сызықтық емес теңдеу қарастырылады:

$$\frac{dN}{dt} = rNF(N),$$

мұндағы $F(N)$ қоршаған ортаны реттейтін функцияны білдіреді. Ол келесі шарттарды қанағаттандыруы тиіс:

1. $F(0) = 1$ (N аз кезде популяция rжылдамдықпен экспоненциалды өседі),
2. $F(K) = 0$ ((популяция өсуін тоқтатады),
3. $F(N) < 0$ $N > K$ кезінде (популяция өткізгіштік қабілетінен артық болғанда, популяция ыдырайды).

Осы шарттарды қанағаттандыратын қарапайым сызықты $F(N)$ функциясы келесі формуламен беріледі:

$$F(N) = 1 - N/K$$

Алынған модель - бұл жақсы белгілі логистикалық теңдеу.

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - N/K). \tag{2}$$

Бұл теңдеу көптеген биологиялық процесстерді сипаттайды.

(2.2) логистикалық теңдеуінің стационарлық нүктелері (2)
$N^* = 0, K$ болып табылады. r, $K > 0$ кезінде

$$F(N) = rN(1 - N/K)$$

функциисының N-ге қатысты өзгерісі 2.1 – суретте көрсетілген. Бұл суретте $N^* = 0$ – тұрақсыз стационарлық нүкте, ал $N^* = K$ – тұрақты стационарлық нүкте.

Аналитикалық әдісті қолдана отырып, функцияның туындысын табамыз:

$$F'(N) = r(1 - 2N/K).$$

$F'(0) = r > 0$ және $F'(K) = -r < 0$ екенін көреміз. Қайтадан $N^* = 0$ тұрақсыз күй және $N^* = K$ тұрақты күй екендігі дәлелденеді.

2.1-сурет

Логистикалық теңдеудің аналитикалық шешімі қарастырылады. Негізгі айнымалыларды - популяцияның саны және уақыт - өлшемсіз түрге келтіруден басталады: $\tau = t/t^*$, $\eta = N/N^*$.

Онда (2) логистикалық теңдеуі келесі түрге келеді:

$$\frac{d\eta}{d\tau} = rt_*\eta(1 - N_*\eta/K),$$

бұл теңдеу $t_* = 1/r$ и $N^* = K$ арқылы қарапайым түрге келеді. Сол үшін өлшемсіз айнымалыларды келесі түрде жазуға болады $\tau = rt, \eta = N/K$. Сонымен қоса өлшемсіздірілген логистикалық теңдеу келесі түрге келеді:

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \eta(1 - \eta), \tag{3}$$

$\eta(0) = \eta_0 = N_0/K$ - бастапқы шарт, мұндағы N_0 - популяцияның бастапқы саны. Өлшемсіздірілген (3) теңдеуінің бос параметрлері жоқ, ал (2) теңдеуінде r және K бар екенін атау қажет. Бос параметрлердің (r және K) тәуелсіз бірлік (уақыт және популяция саны) санына дейін азаюы өлшемсіздірудің жалпы ерекшелігі болып табылады.

Өлшемсіздірілген логистикалық теңдеуінің (3) шешімін айнымалыларға жіктеу арқылы жалғастыруға болады. $\tau = 0$-ден τ-ға дейін және $\eta = 0$–ден η–ға дейін интегралдау келесі теңдікке алып келеді:

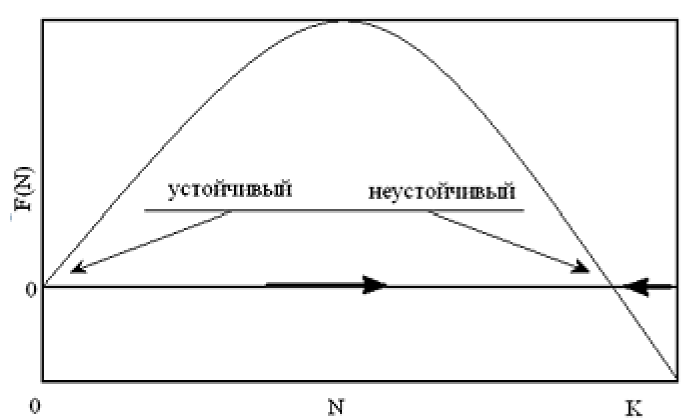
$$\int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\eta(1-\eta)} = \int_0^{\tau} d\tau$$

Өлшемді айнымалыларға орала отырып, келесі шешім алынады:

$$N(t) = \frac{N_0}{N_0/K + (1 - N_0/K)e^{-rt}}$$

Мальтузиандық өсу моделінің қорытындысы популяцияның үлкен мөлшеріне арналған. Әдетте аз популяциялар стохастикалық эффектілерді көрсетеді, бұл моделдеуді айтарлықтай қиындатады.

Популяция өсуінің стохастикалық моделі



Қарастырылған популяция моделдері детерминистік болып табылады. Алайда, детерминистік модель шынайы экологиялық жүйенің көрінісі бола алмайтын екі себеп бар. Біріншіден, көбею және өлім – жітім процесстерінің ықтималдық сипатын ескермейді; екіншіден, ортада жүзеге асатын кездейсоқ толқындарды және модель параметрлерінің кездейсоқ флуктуацияларын ескермейді. Бұл факторларды есепке алу математикалық аппараттың күрделенуіне алып келеді. Сол себепті стохастиканың мүмкін болатын салдарын ескере отырып, зерттеушілер детерминистік модель құрастырады. Егер детерминистік модель тұрақты тепе-теңдік куәландырса, онда бұл модель ұзақ өмір сүруді болжайды. Егер детерминистік модель бір немесе бірнеше түрдің периодты азаюын болжаса, онда детерминистік модель осы түрлердің жойылуының оң ықтималдығын береді. Ақыр соңында, егер детерминистік модельде тепе-теңдік болмаса немесе тепе-теңдік тұрақсыз болса, стохастикалық модель жоғалу ықтималдығын жоғары деп болжайды. Популяция саны N енді дискретті кездейсоқ айнымалы ретінде қарастырылады. Уақытқа тәуелді $p_N(t)$ ықтималдығымен масса функциясы t уақытта популяция N өлшемге ие болатындай ықтималдық ретінде анықталады. N нөлден шексіздікке дейінгі мәндердің біреуін қабылдауға тиіс болғандықтан келесі түрді аламыз:

$$\sum_{N=0}^{\infty} p_N(t) = 1$$

барлық $t \geq 0$үшін. Сол сияқты b – орташа жан басына шаққандағы туғандар саны болсын. $\Delta t \to 0$ ұмтылғанда адамның Δt уақытында туылу ықтималдығы $b\Delta t$ арқылы берілсін. Мысалы, жан басына шаққандағы туудың орташа деңгейі 365 күндік бір жылда бір ұрпақ болса, онда сол адамның сол күнде туылу ықтималдығы $1/365$ тең. Оның үстіне, $t = 0$ болса, халықтың мөлшері N_0 болады, сондықтан $p_{N0}(0) = 1$, барлық қалған p_N, $t = 0$- де нөлге тең.

Ары қарай $p_N(t)$ ықтималдық функциясының дифференциалдық теңдеулер жүйесі келесідей анықталады. Халықтың $t+\Delta t$ уақытында өлшемі $N > 0$ немесе t уақытында өлшемі $N-1$ болу үшін және бір туылу орын алса немесе өлшемі N болатын болса және t уақытта туылу болмаса, яғни:

$$p_N(t+\Delta t) = p_{N-1}(t)b(N-1)\Delta t + p_N(t)(1 - bN\Delta t). \tag{4}$$

Екі жақтан $p_N(t)$ азайтып, Δt- ға бөліп, $\Delta t \to 0$ ұмтылғанда шегін алып, қарапайым дифференциалдық теңдеуге әкеледі.

$$\frac{dp_N}{dt} = b[(N-1)p_{N-1} - Np_N], \quad N = 1, 2, ... \tag{5}$$

мұндағы $p_0(t) = p_0(0)$.

Алдымен келесі түрдегі бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеуінің шешімі қарастырылады:

$$\frac{dy}{dt} + ay = g(t), y(0) = y_0 \tag{6}$$

мұндағы $y = y(t)$ және a - тұрақты. Біріншіден, келесідей теңдеуді қанағаттандыратын:

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu(\frac{dy}{dt} + ay)$$

μ - интегралдау факторы табылады. Сол жақты дифференциялдап, оң жағын μ– ге көбейту арқылы келесі теңдеу алынады:

$$y\frac{d\mu}{dt} + \mu\frac{dy}{dt} = \mu\frac{dy}{dt} + \mu ay,$$

немесе

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu.a$$

Бұл теңдеуді еркін бастапқы шартпен интегралдап, қарапайымдылық үшін $\mu(0) = 1$ деп алынады, ал $\mu(t) = e^{at}$. Онда:

$$\frac{d(e^{at}y)}{dt} = e^{at}g(t)$$

Бұл теңдеуді 0–ден t–ге дейін интегралдап:

$$e^{at}y(t) - y(0) = \int_0^t e^{as}g(s)ds$$

келесі шешім алынады:

$$y(t) = e^{-at}(y(0) + \int_0^t e^{as}g(s)ds. \tag{7}$$

(5) теңдеуі келесі шарт орындалғанда,

$$a = bN \text{ и } g(t) = b(N-1)P_{N-1}$$

(6) теңдеуі болады:

$t = 0$-ге тең болғанда N_0 популяция саны үшін бастапқы шарттар келесідей жазылуы мүмкін: $p_N(0) = \delta_{N,N_0}$, мұндағы δ_{ij} Кронекер дельта функциясы:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ 1, & \text{если } i = j \end{cases}$$

(5) – теңдеуін формальды интегралдау арқылы және (7) пайдаланып келесітүрдегі шешім алынады:

$$p_N(t) = e^{-bNt}[\delta_{N,N_0} + b(N-1)\int_0^t e^{bNs}p_{N-1}(s)ds]$$

Әдебиеттер тізімі

1. Братусь А.С. Динамические системы и модели биологии /Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П./ – М.: Физматлит, 2010. –400с.